Niezrozumiała niepamięć o dziedzictwie Peany

Szymon Dolecki (Dijon)[i] i Gabriele H. Greco (Trento)[ii]

Giuseppe Peano (1858-1932) dokonał wielu odkryć i wprowadził wiele pojęć, które przypisywane są innym matematykom, mimo iż ich wkład był późniejszy i często pośledniejszy. Naszym głównym celem jest przypomnienie tych jego dokonań, które są najmniej znane oraz wskazanie na wartość innych, które wydają się niedostatecznie docenione. Zastanowimy się także nad przyczynami tej niezrozumiałej niepamięci.

Peano rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie Turyńskim w 1876 roku, a ukończył w roku 1880 z wysokim odznaczeniem (pieni voti assoluti)[1]. Przez rok był asystentem D'Ovidia, a potem został asystentem Gennocchiego. Z powodu problemów zdrowotnych Gennocchiego, który miał już wtedy 64 lata, Peano przejął wkrótce wykład swego mistrza z rachunku różniczkowego i całkowego.

Ta odpowiedzialna funkcja przyczyniła się zapewne do wyjątkowej staranności z jaką Peano przygotowywał swe wykłady. Posługiwał się notatkami jakie studenci robili z wykładów Gennocchiego w poprzednich latach, a także przeglądał wszystkie dostępne wtedy podręczniki. W ten sposób odkrył wiele niedoskonałości i błędów we współczesnej mu literaturze. Jednym z owych błędów była definicja pola powierzchni z podręcznika do rachunku różniczkowego i całkowego J.-A. Serreta[2], która, jak pokazał Peano[3], prowadziła do sprzeczności w przypadku powierzchni bocznej walca. Wkrótce Peano opublikował podręcznik (*Angelo Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano, Ed. Fratelli Bocca, Torino 1884*), który

---

[1] Tylko dwóch kandydatów zdało.

[2] J.-A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, volume 2, Gauthier-Villard, Paris 1880

[3] Peano dokonał tego odkrycia w 1882 roku. Jego kontrprzykład, oparty na przybliżeniach walca latarniami weneckimi, był identyczny z kontrprzykładem Schwarza z 1880.

faktycznie był autorstwa Peany, jak oświadczył sam Genocchi, cokolwiek niezadowolony z samowolnej inicjatywy swego asystenta.

Można się zastanawiać w jakim stopniu precyzja i prostota, z jaką formułował swe obserwacje matematyczne, była spowodowana starannością wynikającą z poczucia odpowiedzialności w jego roli zastępcy Gennocchiego, a w jakim była charakterystyczna dlań już uprzednio. A może po prostu owa jasność przekazu była odzwierciedleniem łatwości i głębi zrozumienia. W każdym razie kontrastowała ona z brakiem ścisłości języka przeważającej większości tekstów matematycznych tamtej epoki.

Łatwość z jaką Peano pojmował i przedstawiał swe odkrycia, często wyprzedzające ducha jego epoki, stanowiła zapewne trudność dla współczesnych. Do dziś zresztą wielu sądzi, iż jeśli idea jest jasna, to pewnie nic w niej nie ma. Być może dlatego różne dokonania nie przykuły dostatecznie uwagi i zostały zapomniane. Podajmy jako przykład uwagę Peany zawierającą ideę mierzalności podzbioru płaszczyzny[4].

Najbardziej naturalny sposób pojęcia pola figury polega na wyobrażeniu sobie wielokątów zawierających figurę w swoim wnętrzu oraz wielokątów zawartych w jej wnętrzu; istnieje infimum pola pierwszych i supremum pola drugich; jeśli się pokrywają, to ich wspólna wartość stanowi pole figury, dobrze zdefiniowane i obliczalne z dowolną dokładnością. Gdyby te wielkości okazały się różne, pojęcie pola w tym przypadku nie istniałoby.

Zauważmy iż innym przykładem czytelności przekazu (w tamtych czasach) są dzieła Cantora. Cechą wspólną Cantora i Peany było zrozumienie konieczności wprowadzenia jednoznacznego języka do wyrażania pojęć matematycznych, języka który stanowiłby nieodłączny składnik rozumowania[5]. Stosowanie mieszaniny języków naturalnych i formuł matematycznych, które charakteryzowało dyskurs matematyczny do XIX-ego wieku, przyczyniło się do rozlicznych błędnych we wnioskach wyciąganych przez licznych, także wybitnych, matematyków. Peano taki język wprowadził i używał w procesie dowodowym. Dzięki niemu odkrył pewnik wyboru (czternaście lat przed Zermelo). Peano formułuje pewnik wyboru w dowodzie istnienia rozwiązań równań różniczkowych[6], które był przeprowadzony wyłącznie w języku formalnym z komentarzem po francusku. Zermelo wspomina[7], iż ideę pewnika pojawiła się w rozmowach z Erhardem Schmidtem. Jest bardzo prawdopodobne, iż ten znał artykuł Peany z 1890.

Przedstawmy aksjomatyzację liczb naturalnych zaproponowaną przez Peanę w 1981 roku[8], poprzedzoną komentarzem Peany[9], w którym stwierdza, iż zasadnicza trudność aksjomatyki (uporządkowanego) zbioru liczb naturalnych wynika z nieścisłości języków pospolitych i proponuje język składający się wyłącznie z symboli logicznych i arytmetycznych.

> *Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multis tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur [...] Ideas omnes quae in arithmeticae principiis occurrunt, signis indicavi, ita ut quaelibet propositio his tantum signis enuncietur. Signa aut ad logicam pertinent, aut proprie ad arithmeticam.*

---

4 G. Peano, Sull'integrabilità delle funzioni, Atti Accad. Scienze di Torino, 18, 439-446, 1886.

5 Wprowadzenie uniwersalnego języka naukowego było już postulatem Leibniza.

6 G. Peano, Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Mathematische Annalen, 37, 182–228, 1890.

7 E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Mathematische Annalen, 59, 514–516, 1904.

8 G. Peano, Sul concetto di numero, Rivista di Matematica, 1 (1891) 87-102, 256-67.

9 G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Bocca, Augustae Taurinorum, 1889.

Jak widać, praca Peany z której pochodzi powyższy cytat, jest napisana po łacinie, natomiast następujący fragment, pochodzący z piątego i ostatniego wydania *Formulario mathematico*[10], encyklopedii matematycznej redagowanej przez Peanę, jest napisany w łacinie nieodmiennej *(latino sine flexione)*, sztucznym języku wprowadzonym i używanym przez Peanę w komentarzach do części czysto matematycznych, pisanych w języku formalnym Peany[11].

> [...] nos sume tres idea N_0, 0, + ut idea primitivo, per que nos defini omni symbolo de Arithmetica.
>
> Nos determina valore de symbolo non definito N_0, 0, + per systema de propositio primitivo sequente.
>
> ❋ 1. Pp
>
> ·0 $N_0 \; \varepsilon \; \mathrm{Cls}$
>
> ·1 $0 \; \varepsilon \; N_0$
>
> ·2 $a \varepsilon N_0 .\supset. a+ \; \varepsilon \; N_0$
>
> ·3 $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : a \varepsilon s .\supset_a . a+ \; \varepsilon s \cdot :\supset. N_0 \supset s$ Induct
>
> ·4 $a,b \varepsilon N_0 . a+ = b+ .\supset. a = b$
>
> ·5 $a \varepsilon N_0 .\supset. a+ -= 0$

Można przypuszczać, że język formalny, którego opanowanie wymagało pewnego choć niewielkiego wysiłku, stanowił dodatkową barierę w dostępie do osiągnięć Peany.

W 1887 Peano wydaje *Applicazioni geometriche*[12], a w 1888 *Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann*[13]. Większość fundamentalnych dokonań Peany już się w nich znajduje, choć często jeszcze w nieostatecznej formie. Dotyczą one rachunku różniczkowego, logiki, teorii zbiorów, arytmetyki, topologii, przestrzeni unormowanych, teorii całki i miary oraz równań różniczkowych zwyczajnych. Oto niewyczerpująca lista największych osiągnięć Peany:

Ścisła formalizacja języka logiczno-matematycznego.
Sformułowanie aksjomatu wyboru (1890).
Aksjomatyzacja liczb naturalnych (1889).
Aksjomatyzacja przestrzeni wektorowej (1888).
Teoria operatorów liniowych. Definicja normy operatora liniowego (1888).
Definicja różniczkowalności funkcji (wektorowej, 1908) wielu zmiennych (1887).
Definicja wnętrza, brzegu i domknięcia podzbioru (przestrzeni euklidesowej) (1887).
Definicje miary wewnętrznej, zewnętrznej i mierzalności (1883).
Definicje granic topologicznych górnej i dolnej rodziny zbiorów (1887, 1903).
Definicje stożków stycznych górnego i dolnego (1887, 1908).
Warunki konieczne optymalności (1887).
Odwzorowanie ciągłe odcinka w kwadrat (1890).

---

10 G. Peano, Formulario Mathematico, Fratelli Bocca Editori, 1908.

11 Symbol ⊃ oznacza wynikanie, ε oznacza przynależność (obecnie ∈), Cls oznacza klasę wszystkich zbiorów.

12 G. Peano, Applicazioni Geometriche, Fratelli Bocca Editori, 1887.

13 G. Peano, Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Fratelli Bocca, 1888.

Operatorowa teoria systemów liniowych równań różniczkowych (1888).
Twierdzenie o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych przy założeniu ciągłości danych (1890).
Teoria miary addytywnej (1887).
Definicja pochodnej miary względem innej miary. Twierdzenie o całkowaniu (1887).
Teoria zwartości w języku rodzin dystrybutywnych i antydystrybutywnych (rusztów filtrów) (1887).
Twierdzenie o zamiatającej stycznej (uogólnienie twierdzenia Mamikona) (1887).

Omówmy kilka z tych, które wydają się najmniej znane.

Różniczkowalność

Uogólnienie pojęcia pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej na funkcje wielu zmiennych nie było oczywiste, jak mogłoby się wydawać *a posteriori*. W praktyce do XIX-ego wieku używano *różniczki zupełnej* definiowanej przy pomocy pochodnych cząstkowych, najczęściej milcząco zakładając ich ciągłość.

Peano zdefiniował w *Applicazioni geometriche* (1887) pochodną funkcji rzeczywistej określonej na dowolnym (niepustym) podzbiorze przestrzeni euklidesowej z jego punkcie skupienia. W *Formulario mathematico* (1908) mówi, że funkcja f z podzbioru A jednej przestrzeni euklidesowej X w drugą Z jest różniczkowalna w punkcie skupienia x zbioru A, jeśli istnieje operator liniowy $L : X \rightarrow Z$, taki że

$$\lim_{A \ni y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - L(y-x)}{\|y-x\|} = 0$$

Jest to definicja współczesna, mimo że została sformułowana ponad sto lat temu. Występują w niej pojęcia *operatora liniowego* i *normy*. Przypomnijmy teraz, że to Peano wprowadził abstrakcyjne pojęcie przestrzeni wektorowej, przekształcenia liniowego, normy i normy operatorowej w 1888.[14] Pamiętajmy, iż język wektorowy nie był powszechnie używany na początku XX-ego wieku; rozpowszechnił się stopniowo dopiero w latach trzydziestych po ukazaniu się *Théorie des opérations linéaires* Banacha i *Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik* Von Neumanna [15].

Definiując pochodną przy pomocy operatora liniowego, Peano uniezależnił rachunek różniczkowy od układu współrzędnych, a więc umożliwił jego reprezentację w różnych układach, a co za tym idzie, przedstawił zmianę zmiennych jako złożenie operatorów.

Pochodna Peany nazywana jest obecnie *pochodną Frécheta,* który publikuje w 1911 roku notę[16], gdzie mówi, że funkcja dwóch zmiennych f jest różniczkowalna w danym punkcie, jeżeli powierzchnia przez nią określona posiada jedyną płaszczyznę styczną w odpowiadającym punkcie powierzchni nie zawierającą prostej pionową.

---

[14] G. Peano. Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Fratelli Bocca, 1888.
[15] Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 3, 587–642.
[16] M. Fréchet, Sur la notion de différentielle, C.R.A.Sc. Paris, 152, 845–847, 1911.

Une fonction $f(x, y)$ a une différentielle à mon sens au point (x_0, y_0), si la surface $z = f(x, y)$ admet en ce point un plan tangent unique non parallèle à Oz : $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$. Et alors cette différentielle est par définition l'expression

$$p\,\Delta x + q\,\Delta y,$$

où Δx, Δy sont des accroissements arbitraires de x, y.

Kontrast między nowoczesną, precyzyjną definicją Peany a mgławym opisem Frécheta jest ogromny. Pamiętajmy, iż w tamtych czasach pojęcie stycznej posiadało wiele sprzecznych określeń. To właśnie Peano dostarczył wiele przykładów sprzeczności rozlicznych definicji, a następnie podał definicje, matematycznie prawidłowe, stożków stycznych, górnego i dolnego, jako granicy, odpowiednio górnej i dolnej (zwanych dziś *Kuratowskiego*) odpowiedniej jednokładności.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden aspekt. Peano definiuje różniczkowalność funkcji określonej na dowolnym zbiorze! Peano, obok Cantora, jest jednym z pierwszych matematyków rozumujących w kategorii zbiorów abstrakcyjnych. Na przykład Peano definiuje funkcję z X do Y jako podzbiór produktu kartezjańskiego $X \times Y$. Jest to w tamtych czasach prawdziwa rewolucja.

Peano bada wielorakie aspekty różniczkowalności. W 1892 wprowadza pojęcie nazywana dzisiaj często *ścisłą różniczkowalnością*, które jest mocniejszym wariantem omawianej wcześniej różniczkowalności

$$\lim_{A \ni y, z \to x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(x)$$

i pokazuje, że ścisła różniczkowalność na zbiorze otwartym jest równoważna *ciągłej różniczkowalności* na tym zbiorze, to znaczy przynależności f do klasy C^1. W 1888 roku dowodzi twierdzenie o wartości średniej dla funkcji wektorowej, w którego sformułowaniu występuje pojęcie domkniętej wypukłej powłoki zbioru, wprowadzenie której przypisywano Minkowskiemu[17]. W 1892 Peano definiuje rozwinięcia wielomianowe funkcji i pokazuje przykłady funkcji mającej nieciągłości w dowolnym otoczenie punktu, w którym posiada rozwinięcia wielomianowe dowolnego rzędu.

Warunki optymalności

Już w 1887 roku, w *Applicazioni geometriche* pojawia się *Regula*, czyli warunek konieczny optymalności funkcji różniczkowalnej w punkcie skupienia dowolnego podzbioru przestrzeni euklidesowej. Poniższa jej forma pochodzi z *Formulario mathematico* z 1908 roku.

Regula. *Jeśli funkcja f zdefiniowana na zbiorze A, różniczkowalna w punkcie skupienia x tego zbioru, osiąga maksimum w tym punkcie, to pochodna f'(x) jest ujemna w dowolnym kierunku nalężącym do górnego stożka stycznego do A w punkcie x.*

Także i w tym przypadku sformułowanie Peany zadziwia nowoczesnością i precyzją. Dokładnie tak samo wypowiadamy to twierdzenie dzisiaj. I znowu niespodzianka w postaci

---

[17] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen. Teubner, 1896.

górnego stożka stycznego, zwanego też *kontyngentem* i przypisywanego Bouligandowi[18] i F. Severiemu[19].

Bouligand i Severi określają górny stożek styczny do zbioru A w punkcie x jako zbiór półprostych będących granicami siecznych A wychodzących z x. Może to dziwić w przypadku Bouliganda, gdyż znał on dobrze przestrzenie wektorowe[20]. Kilkadziesiąt lat wcześniej, Peano definiuje to samo pojęcie precyzyjnie i nowocześnie jako następującą granicę górną[21]:

$$\operatorname{Tang}(A,x) := x + \operatorname*{Ls}_{\lambda\to+\infty} \lambda(A-x)$$

a już w *Applicazioni geometriche* (1887) pojawia się afiniczny dolny stożek styczny

$$\operatorname{tang}(A,x) := x + \operatorname{Li}_{\lambda\to+\infty}\lambda(A-x).$$

Figura tangente Severiego z 1931 roku to dokładnie górny stożek Peany.

Przypomnijmy definicje symboli granic występujące w powyższych określeniach. *Granice dolną i górną „figury zmiennej"*, to znaczy rodziny podzbiorów A_λ przestrzeni euklidesowej zależnych od rzeczywistego parametru λ, Peano definiuje odpowiednio w 1887 i 1908 jako

$$\operatorname{Li}_{\lambda\to+\infty} A_\lambda := \{y\in X : \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{d}(y,A_\lambda)=0\}$$
$$\operatorname{Ls}_{\lambda\to+\infty} A_\lambda := \{y\in X : \liminf_{\lambda\to+\infty} \mathrm{d}(y,A_\lambda)=0\}$$

oraz podaje wzór teoriomnogościowy

$$\operatorname{Ls}_{\lambda\to\infty} A_\lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\bigcup_{\lambda\geq n} A_\lambda.$$

Granice te zwane są najczęściej *granicami Kuratowskiego*, czasami *Kuratowskiego-Painlevé*[22]. Znajdują się one także w *Grundzüge der Mengenlehre* F. Hausdorffa z 1914 roku. Jak widzimy, Peano używał tych granic wiele wcześniej niż wspomniani autorzy.

Jak wspomnieliśmy, Severi definiuje stożek górny w 1931. Zarówno on jak i Guareschi parę lat później badają związki różniczkowalności ze stycznymi do wykresów odpowiednich funkcji. Jest zaskakujące, iż nie cytują oni Peany. Peano wykładał od 1880 do 1932 roku na Uniwersytecie Turyńskim, gdzie Severi i Guareschi studiowali matematykę około 1900 roku. Peano był wtedy u szczytu sławy[23], jego książki były powszechnie znane, w szczególności podręczniki z 1887 i 1888 roku, a w tych podręcznikach Peano opisywał pojęcia styczności i liczył styczne rozlicznych figur klasycznych. Dlaczego jego byli uczniowie go nie cytują. Wiadomo, że o nim pamiętali. W 1954 Severi pisze o Peanie jako o wielkim logiku matematycznym, który był jego mistrzem i przyjacielem[24]. W 1928 Guareschi wysyła telegram do Peany z okazji urodzin.

---

18 G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Gauthier-Villars, 1932.

19 F. Severi, *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*. Annales Soc. Polon. Math., 9:97– 108, 1931.

20 G. Bouligand, *Leçon de la Géométrie Vectorielle*, Vuibert, 1924.

21 Jest to stożek afiniczny; często używa się obecnie stożka wektorowego będącego translacją poprzedniego.

22 K. Kuratowski w *Topology* (tom 1, Academic Press, 1966) cytuje P. Painlevé z C. R. Paris 148 (1909), p. 1156.

23 W 1900 Peano uczestniczył w Paryżu w dwóch kongresach, matematyków i filozoficznym. Obecny tam Bertrand Russell opowiada, iż Peano, we wszystkich debatach, w których brał udział, niezmiennie miał rację.

24 F. Severi. *Enrico Poincaré e la sua opera*. In Poincaré, pages 7–42. Casa Editrice L'Arco-Firenze, 1949. Na stronie 23 Severi pisze: *Il nostro grande logico matematico Giuseppe Peano, che fu mio maestro ed amico e della cui intuizione conobbi tutta la forza.*

Topologia

Peano formalizuje definicje wnętrza, brzegu i domknięcia zbioru oraz podaje ich związek z pojęciem Cantora zbioru domkniętego (*Applicazioni geometriche* z 1887 roku). Pojęcia te, dotyczące podzbiorów przestrzeni euklidesowych, używane były już uprzednio dość powszechnie, ale w sposób nieformalny. Jedną z zasadniczych motywacji Peany przy wprowadzeniu ścisłej definicji tych pojęć wydaje się potrzeba uściślenia pojęć miary wewnętrznej i zewnętrznej[25].

Od lat osiemdziesiątych XIX-tego wieku Peano używa metod topologicznych rutynowo w różnorodnych działach analizy. Jak wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale, już w 1887 roku definiuje topologiczną granicę dolną, a w 1908 i granicę górną, sparametryzowanej rodziny zbiorów, które stosuje przy definiowaniu stożków stycznych.

Najsłynniejszym topologicznym wynikiem Peany jest zapewne twierdzenie o istnieniu ciągłej krzywej pokrywającej kwadrat, mimo iż Hausdorff kwalifikuje je jako jeden z najbardziej zdumiewających faktów teorii mnogości[26]. Jest to jedno z najbardziej znanych twierdzeń Peany. Obecnie jest ono szczególnym wnioskiem twierdzenia Hahna-Mazurkiewicza o tym że każda przestrzeń metryczna zwarta, spójna i lokalnie spójna jest ciągłym obrazem domkniętego odcinka. Mniej znany jest fakt, że Peano podaje wzór analityczny tej krzywej, w przeciwieństwie do innych matematyków komentujących krzywą Peany, podających tylko ciąg jej przybliżeń.

Natomiast najbardziej niebywałe jest rutynowe stosowanie przez Peanę w latach osiemdziesiątych[27] pojęcia zwartości, formułowanego przy pomocy rodzin dystrybutywnych i antydystrybutywnych. Forma dystrybutywna została wprowadzona przez Cantora w 1884 roku[28]. Rodzina zbiorów nazywa się *dystrybutywną* jeśli

$$(\mathbb{D}) \qquad H_0 \cup H_1 \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow H_0 \in \mathcal{H} \text{ or } H_1 \in \mathcal{H}.$$

Zauważmy iż jest niczym innym jak *rusztem filtru* Choqueta[29]. Rodzina antydystrybutywna Peany otrzymana jest przez przejście do dopełnienia rodziny dystrybutywnej. Rodzina zbiorów nazywa się *antydystrybutywną* jeśli

$$(\mathbb{I}) \qquad A_0 \cup A_1 \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow A_0 \in \mathcal{A} \text{ and } A_1 \in \mathcal{A}.$$

Rozpoznajemy definicję *ideału* zbiorów. Rodzina dopełnień elementów rodziny dystrybutywnej jest *filtrem*, to znaczy spełnia warunek

$$(\mathbb{F}) \qquad F_0 \in \mathcal{F} \text{ and } F_1 \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$$

Chociaż termin *zwartość (compactness)* pojawił się później, następująca własność zbioru S rozpatrywana przez Cantora wyraża właśnie (warunkową) zwartość:

Dla każdej rodziny dystrybutywnej zawierającej S, istnieje punkt którego każde otoczenie należy do tej rodziny.

Przypominając sobie, iż rodzina jest antydystrybutywna wtedy i tylko wtedy jest ona rusztem pewnego filtru, otrzymujemy równoważną własność:

Każdy filtr którego elementy przecinają S, ma punkt skupienia.

Przechodząc do dopełnień rodzin dystrybutywnych, dostajemy:

---

[25] Podobnie w przeszłości Cauchy zdefiniował ciągłość z okazji wprowadzenia całki.

[26] Das ist eine der merkwürdigsten Tatsachen der Mengenlehere, deren Entdeckung wir G. Peano verdanken. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914.

[27] XIX-tego wieku.

[28] G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 24, 454–488, 1884.

[29] G. Choquet. Sur les notions de filtre et de grille. C. R. Acad. Sci. Paris, 224, 171–173, 1947. Zbiór H należy do *rusztu* rodziny podzbiorów pewnego zbioru *A* jeśli H ma wspólny punkt z każdym elementem *A*.

Jakikolwiek ideał zawierający otoczenie każdego punktu, zawiera S.

Innymi słowy, pokryciową[30] definicje warunkowej zwartości:

Każde topologiczne pokrycie przestrzeni posiada skończoną podrodzinę pokrywającą S.

Używając rodzin dystrybutywnych, Cantor pokazuje w 1884, że każdy ograniczony podzbiór przestrzeni euklidesowej jest warunkowo zwarty[31]. Jest intrygujące, iż Cantor, który zazwyczaj przywiązywał wielką wagę do adekwatności terminologii, nie daje żadnej nazwy rodzinom dystrybutywnym, mówiąc jedynie o prostej i bardzo ogólnej własności. W *Applicazioni geometriche* Peano wprowadza terminy *dystrybutywność* i *antydystrybutywność* oraz tłumaczy twierdzenie Cantora na język antydystrybutywny.

Trudno powstrzymać się od refleksji nad znaczeniem w badaniach matematycznych nazywania pojęć, które wydają się istotne, gdyż jest to sposób na wskazanie owej istotności czytelnikowi. Wydaje się, że Zermelo przeoczył ważność rodzin dystrybutywnych w pracach Cantora, których był wydawcą pięć lat później, bo przypisuje ich definicję Peanie[32].

Przypomnijmy, że Borel dowodzi dopiero w 1895, że odcinek domknięty i ograniczony jest (pokryciowo) zwarty[33]. Inne sformułowania abstrakcyjnego pojęcia zwartości pojawiają się w 1902 (Lebesgue), 1921 (Vietoris) i 1923 (Aleksandrow i Urysohn).

Peano posługuje się dystrybutywną definicją zwartości w dowodzie twierdzenia o istnieniu rozwiązań systemu równań różniczkowych[34]. Aby pokazać z jaką łatwością i elegancją stosuje Peano abstrakcyjną definicję zwartości, naszkicujmy dowód Peany z 1887 faktu, że każda rzeczywista funkcja ciągła na przestrzeni zwartej osiąga maksimum:

Niech f będzie funkcją ciągłą na przestrzeni zwartej S i niech H będzie rodziną tych podzbiorów przestrzeni, na których supremum f równe jest supremum na całej przestrzeni. Ponieważ H jest rodziną dystrybutywną podzbiorów przestrzeni zwartej, istnieje punkt x, którego każde otoczenie należy do H, więc

$$\sup f(S) = \inf_{V \in \mathcal{N}(x)} \sup f(V).$$

Ponieważ f jest ciągła, powyższa granica górna jest równa wartości funkcji w x.

Teoria całki i miary

Peano interesuje się problemami teorii miary od samego początku swej działalności naukowej. Jak wspomnieliśmy, w 1882 odkrywa, że definicja pola powierzchni zaproponowana przez J.-A. Serreta w jego słynnym podręczniku jest wadliwa, a w 1883 definiuje miarę wewnętrzną i zewnętrzną oraz mierzalność podzbioru przestrzeni euklidesowej.

Peano wprowadza abstrakcyjne pojęcie miary jako dystrybutywnej rzeczywistej funkcji zbiorów, to znaczy iż miara sumy dwóch zbiorów jest równa sumie ich miar, jeżeli miara ich przecięcia jest zerowa. W szczególności, miara Peany jest skończenie addytywna. Definiuje

---

30 Rodzinę podzbiorów przestrzeni topologicznej nazywamy *pokryciem topologicznym,* jeśli każdy punkt ma otoczenie należące do tej rodziny.

31 Dla dowolnej rodziny dystrybutywnej H zawierającej taki podzbiór, Cantor konstruuje malejący ciąg domkniętych zbiorów o średnicy dążącej do zera i należących do H. Z ciągłości odcinka wynika, iż przecięcie tych zbiorów zawiera jeden punkt, więc wszystkie otoczenia tego punktu należą do H.

32 E. Zermelo. Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 158, 154–167, 1927.

33 É. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Sc. É.N.S. 3e série, 12, 9–55, 1895. Borel używa w dowodzie indukcji pozaskończonej, nie definiując jej precyzyjnie.

34 G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. Mathematische Annalen, 37:182–228, 1890.

całki dolną i górną jako odpowiednie ekstrema sum Riemanna. Te prace Peany wywierają wpływ na późniejsze prace Jordana i Lebesgue'a i innych. Ważny wpływ w teorii miary ma także topologiczne twierdzenie Peany o ciągłej krzywej pokrywającej kwadrat, jako że zbiór punktów, w jakich ta funkcja nie jest różnowartościowa, jest zaniedbywalny.

T. Hawkins w swej historii teorii miary[35] zauważa, iż teoria Peany jest zadziwiająco elegancka i abstrakcyjna jak na pracę z 1887 roku i frapująco nowoczesna w swym podejściu.

Peano definiuje pochodną miary μ względem miary n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej analogicznie do ścisłej pochodnej funkcji.

$$g_P(\bar{x}) := \lim_{Q \to \bar{x}} \frac{\mu(Q)}{\mathrm{vol}_n(Q)}.$$

Pochodna Cauchy'ego natomiast jest analogiczna do zwyczajnej pochodnej funkcji.

$$g_C(\bar{x}) := \lim_{\substack{Q \to \bar{x} \\ \bar{x} \in Q}} \frac{\mu(Q)}{\mathrm{vol}_n(Q)}.$$

Znaczy to, iż w przypadku pochodnej Peany, zbiór Q dąży (w sensie topologicznych granic rodzin zbiorów) do rozważanego punktu dowolnie, zaś w przypadku pochodnej Cauchy'ego, z warunkiem że go zawiera.

Stosując rodziny dystrybutywne, Peano pokazuje, że jeśli jego pochodna istnieje, to jest ciągła i spełnia

$$\mu(Q) = \int_Q g_P \, d\,\mathrm{vol}_n \, .$$

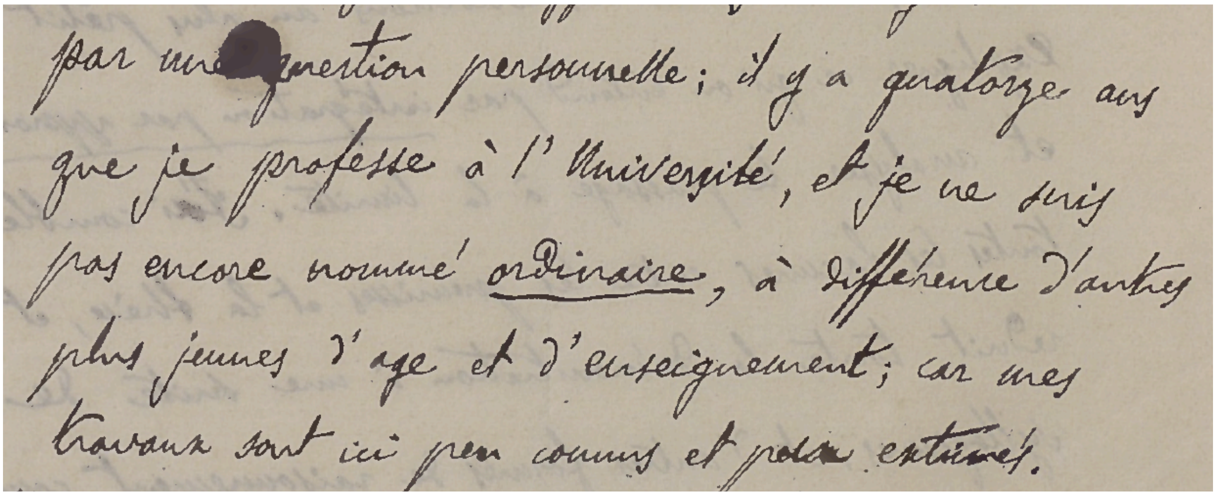
Powyższa formuła formalizuje ideę Keplera i Cauchy'ego *współistniejących wielkości* i poprzedza abstrakcyjne twierdzenia Radona-Nikodyma.

Próba wyjaśnienia

Starając się wyjaśnić przyczyny zapomnienia czy niedocenienia różnych fundamentalnych dokonań Peany, wymienialiśmy jego prostotę w wyrażaniu głębokich myśli, która kontrastowała z mozolnym i zawiłym językiem charakteryzującym znakomitą większość publikacji matematycznych jego czasów. Sama istota różnych koncepcji Peany wyprzedzała tamtą epokę. Mówiliśmy także, iż formalny język matematyczno-logiczny, który wprowadził dla osiągnięcia jednoznaczności semantycznej i jakiego używał w dowodach, był przeszkodą w poznaniu jego dzieła.

Nowatorstwo Peany rozbudziło wrogość wśród konserwatywnych matematyków, a w szczególności wielu jego kolegów z Uniwersytetu Turyńskiego. Na przykład, już samo używanie przestrzeni wektorowych wywoływało niechęć. W liście do C. Jordana z 1894, Peano żali się iż jego twórczość jest bądź nieznana, bądź niedoceniana przez jego otoczenie.

[35] T. Hawkins. Lebesgue's theory of integration. Its origin and developments. AMS Chelsea Publishing, 1975.


par une question personnelle; il y a quatorze ans
que je professe à l'Université, et je ne suis
pas encore nommé ordinaire, à difference d'autres
plus jeunes d'age et d'enseignement; car mes
travaux sont ici peu connus et peu estimés.

Kiedy w 1925 roku, popierany przez Szkołę Peany, mimo opozycji grupy Corrado Segrè, Tricomi otrzymał katedrę matematyki na Uniwersytecie Turyńskim, wrogość do Peany i jego matematyki znalazła w nim swoje wcielenie.

Wspomnijmy, że do Szkoły Peany należeli między innymi Giovanni Vailati, Filiberto Castellano, Cesare Burali-Forti, Alessandro Padoa, Giovanni Vacca, Mario Pieri, Tommaso Boggio i Ugo Cassina[36]. W pewnym sensie Bertrand Russell czuł się też członkiem Szkoły Peany. Russel wspomina[37]: *The Congress [of Philosophers in Paris in 1900] was a turning point in my intellectual life, because I there met Peano.*

Peano został *de facto* pozbawiony wykładu z rachunku różniczkowego i całkowego, choć formalnie to on sam odstąpił wykład Tricomiemu. Kariery uczniów Peany były poważnie utrudnione. Afiszowanie powiązań z Peaną stało się niezręczne a nawet wręcz szkodliwe.

Ostracyzm wzmógł się gdy Peano rozwinął badania nad logiką i formalnym językiem logiczno-matematycznym.

W 1958 roku słynny ekonomista, Luigi Einaudi, który był profesorem Uniwersytetu Turyńskiego zanim zastał prezydentem Republiki Włoskiej, pisze[38] o zapomnianym dziedzictwie Peany i o losie jego utalentowanych uczniów, z których jeden (Vacca) został profesorem języka chińskiego i literatury chińskiej, a drugi (Vailati), mimo wielkiego uznania jakim cieszył się wśród matematyków na świecie, nie otrzymał profesury i utrzymywał się z uczenia w szkołach średnich.

> *Il professor Peano fu vero maestro, sia per l'invenzione di teoremi, che ritrovati poi da altri, resero famosi gli scopritori, sia per l'universalità del suo genio. Nemmeno a farlo apposta, taluni suoi assistenti ai quali si pronosticava un grande avvenire nel campo matematico, presero tutt'altra via. [... Vacca, assistente di Peano, divenuto] professore universitario di lingua e letteratura cinese [... Vailati che] nonostante la crescente estimazione in cui era tenuto nel mondo scientifico italiano e straniero, [...] non ottenne la cattedra alla quale doveva aspirare. [...] Così fu che Vailati scomparve dall'orizzonte torinese per girare l'Italia come insegnante nelle scuole medie.*

---

36 H. C. Kennedy, Life and Works of Giuseppe Peano, 2006. Na stronie 259 Kennedy podaje listę 45 członków Szkoły Peany.

37 B. Russell, Autobiography (1872-1914), Atlantic Monthly Press, Boston, 1967.

38 L. Einaudi, Ricordo di Giovanni Vailati (1958). In G. Vailati, editor, Epistolario (1891-1909), Einaudi, 1971.

Jak wspomina biograf Peany, H. C. Kennedy[39], Tricomi, który w międzyczasie zrobił się wpływowy we włoskiej społeczności matematycznej, wyrażał się o Peanie uwłaczająco jeszcze długo po jego śmierci.

Francesco Tricomi (1897-1978)

Uczeń Tricomiego, Lolli, pisze o Peanie[40] jako o niewygodnej i dziwacznej postaci, która przez pół wieku irytowała i żenowała, a w ostatnich trzydziestu latach, niemal pohańbiła całą profesję[41]. Lolli nawiązuje tu do trzydziestu lat, w których Peano poświęcał się coraz bardziej problemom logiki i języka formalnego. Zarzuty, że Peano nie odkrył twierdzenia Gödla o niezupełności, są dość kuriozalne.

Krytykuje się Peanę jako przeciwnika używania pewnika wyboru, który zresztą sam był odkrył. Krytyka ta jest ahistoryczna. Przypomnijmy, że opozycja Peany do pewnika wyboru była konstruktywna. Na przykład w dowodzie istnienia rozwiązań równań różniczkowych, konstruuje selekcję przy pomocy porządku leksykograficznego. Dziś ta postawa jest powszechnie szanowanym konstruktywizmem.

W jakim stopniu wspomniany ostracyzm przyczynił się do niepamięci dokonań Peany, nie wiemy. Peano pozostał przecież mimo niego wielkim autorytetem międzynarodowym[42].

Najważniejsze książki Peany

A. Genocchi. Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano. Fratelli Bocca, 1884.

G. Peano. Applicazioni Geometriche. Fratelli Bocca Editori, 1887.

G. Peano. Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Fratelli Bocca, 1888.

G. Peano. Lezioni di analisi infintesimale. Candeletti, 1893.

G. Peano. Formulario Mathematico. Fratelli Bocca, 1908.

---

[39] H. C. Kennedy, Life and Works of Giuseppe Peano, 2006.

[40] G. Lolli, Nel cinquantenario di Peano, Scientia, 117, 361–363, 1982.

[41] [Lo] scomodo e bizzarro personaggio che per circa cinquanta anni aveva disturbato ed imbarazzato, e negli ultimi trenta quasi disonorato la intera professione.

[42] S. Dolecki i G. H. Greco, Tangency vis-à-vis differentiability in the works of Peano, Severi and Guareschi. J. Convex Analysis, 18, 301–339, 2011.

Prace autorów na temat Peany

F. Bigolin and G. H. Greco. Geometric characterizations of C^1 manifolds in Euclidean spaces by tangent cones. J. Math. Anal. and Appl., 386 (2012), 145-163.

S. Dolecki and G. H. Greco. Towards historical roots of necessary conditions of optimality: Regula of Peano. Control and Cybernetics, 36, 491–518, 2007.

S. Dolecki and G. H. Greco. Tangency vis-à-vis differentiability in the works of Peano, Severi and Guareschi. J. Convex Analysis, 18, 301–339, 2011.

S. Dolecki i G. H. Greco, Amazing oblivion of Peano's mathematical legacy, preprint.

G. H. Greco, S. Mazzucchi and E. M. Pagani. Peano on derivative of measures: strict derivative of distributive set functions. Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni 21, 305-339, 2010.

G. H. Greco, S. Mazzucchi and E. M. Pagani. Peano on definition of surface area, w druku.

G. H. Greco and E. M. Pagani. Reworking on affine exterior algebra of Grassmann: Peano and his School. Istituto Lombardo, Rendiconti Classe di Scienze Matematiche e Naturali, 144, 17-52, 2010.

[i] S. Dolecki, Mathematical Institute of Burgundy, CNRS UMR 5584, Burgundy University, B.P. 47870, 21078

[ii] G. H. Greco, Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Tn), Italy, greco@science.unitn.it