CHAPITRE I

Théorie des ensembles

1. Motivation

Jusqu'au XIX^{e} siècle les mathématiques furent développées à l'aide d'un langage informel, mélangeant des expressions mathématiques avec celles de la langue courante. Ainsi le discours mathématique ne pouvait pas éviter des ambiguïtés présentes dans les langues naturelles, car l'interprétation sémantique n'y est pas univoque. D'où de nombreux cas d'erreurs dans des œuvres mathématiques de l'époque.

La nécessité de rigueur fut ressentie par plusieurs grands esprits, comme Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970) et autres. Nous leur sommes redevables pour la création du langage mathématique moderne rigoureux, celui de la théorie des ensembles.

David Hilbert (1862-1943) écrivait de cette contribution «Que personne ne puisse nous chasser du paradis que Cantor nous a bâti» [(1)]. Plus tard, en parlant au Congrès des Mathématiciens à Bologne en 1928 du langage formel de Peano, Hilbert disait que c'était un outil essentiel pour sa théorie de la démonstration [(2)].

FIGURE I.1. Georg Cantor, Giuseppe Peano et Bertrand Russell

La plupart des notions et des résultats concernant les nombres cardinaux et ordinaux évoqués dans ce chapitre, sont dus à Cantor.

1. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
2. [...] ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie [ist] die Begriffsschrift ; wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, Peano, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben.

2. Fondements

Une théorie déductive est fondée sur des *notions primitives*, autrement dit non définies, et des propositions primitives appelées *axiomes*, c'est-à-dire non démontrées mais déclarés valables. Les notions et propositions primitives sont en nombre fini. La signification d'une notion primitive est donnée indirectement par les axiomes qui la concernent.

Toute notion d'une théorie déductive est définie, moyennant des règles syntaxiques, à partir des notions ayant déjà une signification. Toute proposition de la théorie est déduite des propositions retenues vraies, moyennant des règles logiques inférentielles finies.

Une telle procédure est récursive. Elle nécessite donc des notions et des propositions primitives, car si toute notion était définie par d'autres notions ou toute proposition était une conséquence d'autres propositions, on n'arriverait pas, en reculant à l'infini, à une signification [3]. Une théorie déductive est cohérente si elle ne contient pas de propositions contradictoires [4].

Dans la théorie des ensembles, la notion d'*ensemble* est primitive. Un ensemble est déterminé par ses *éléments* (*cf.,* l'axiome d'extensionalité).

À partir de deux formules élémentaires $x \in y$ (x *appartient à* y) et $x = y$ (x *est égal à* y), on construit des formules moyennant des *connectives* logiques :

$$\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow,$$

respectivement, la *négation*, l'*alternative*, la *conjonction*, l'*implication* et l'*équivalence* et les deux *quantificateurs*, *existentiel* $\exists$ et *universel* $\forall$. Par exemple, si $\alpha, \beta, \varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des propositions, alors $\neg\alpha \vee \beta$, $\exists_x \varphi(x)$, $\forall_x(\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x))$ sont des propositions formées à partir des propositions précédentes à l'aide des connectives et quantificateurs [5].

On définit l'*inclusion* $A \subset B$ par $x \in A \Rightarrow x \in B$ pour tout x.

Une liste d'axiomes fonde la théorie. On utilise d'habitude le système de *Zermelo-Fraenkel* avec l'*axiome du choix (ZFC).*

On n'étudie pas ici la théorie des ensembles de façon systématique. Disons seulement que parmi les axiomes de ZFC, il y a celui d'*extensionalité*, disant que $X = Y$ si et seulement si

$$z \in X \Longleftrightarrow z \in Y,$$

pour tout z. L'axiome de l'*union* dit que pour tout ensemble (d'ensembles) X, il existe un ensemble $Y := \bigcup X$ tel que

$$y \in \bigcup X \Longleftrightarrow \underset{A \in X}{\exists}\ y \in A.$$

3. Une telle procédure est une arborescence avec des (multiples) racines.

4. En 1931 Kurt Gödel a démontré que le théorie des ensembles contient des propositions, qui ne sont pas *décidables*, c'est-à-dire que l'on ne peut ni démontrer ni infirmer.

5. D'ailleurs, certaines de ces formules peuvent être écrites moyennant d'autres, par exemple, $(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

L'axiome de la *puissance* affirme que pour tout ensemble X, il existe l'ensemble 2^X de toutes les parties de X,

$$Y \in 2^X \iff Y \subset X,$$

etc. Bien sûr, $\varnothing, X \in 2^X$ pour tout X. Une partie A de X est dite *propre* si $A \neq \varnothing$ et $A \neq X$.

L'axiome de *séparation* dit que pour toute formule $\varphi(x)$ et tout ensemble X, il existe l'ensemble

$$\{x \in X : \varphi(x)\}.$$

La restriction de la formule à un ensemble est ici essentielle. En général, il n'existe pas l'ensemble de tous les x qui vérifie $\varphi(x)$.

Exemple 2.1 (Paradoxe de Russell)**.** Il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles X pour lesquels $X \notin X$. Effectivement, si Y était un tel ensemble, alors, par définition, $Y \in Y$ si et seulement si $Y \notin Y$.

Comme conséquence, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles. Effectivement, s'il existait un tel ensemble U, alors selon l'axiome de séparation, $Y := \{X \in U : X \notin X\}$ serait un ensemble, d'où la contradiction notée auparavant.

Cependant on peut parler de la *classe* de tous les ensembles, en traitant le terme *classe* comme externe à la théorie des ensembles.

Enfin, l'*axiome du choix* affirme que

Axiome 2.2 (Peano-Zermelo)**.** *Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une application $f : X \to \bigcup X$ telle que $f(A) \in A$ pour tout $A \in X$.*

On attribue généralement la formulation de cet axiome à E. Zermelo **[34]** de 1904, mais il fut déjà formulé par G. Peano dans **[26]** en 1890.

Un élément u d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est dit *maximal* si $x \geq u$ implique que $x = u$.

Théorème 2.3 (Zorn-Kuratowski)**.** *Soit X un ensemble ordonné par $\leq$. Si pour toute partie totalement ordonnée L de X, il existe $w \in X$ tel que $l \leq w$ pour tout $l \in L$, alors pour tout $x \in X$ il existe un élément maximal $u \in X$ tel que $x \leq u$.*

La preuve de ce théorème (dans le cadre de ZFC) sera donnée dans l'annexe A (théorème A.3.11). En réalité, il est équivalent à l'axiome 2.2 du choix dans ZF.

Les propositions logiques correspondent à des opérations sur les parties d'un ensemble ; si $A := \{w \in W : \varphi(w)\}$ et $B = \{w \in W : \psi(w)\}$, alors on

a, respectivement,

$$\begin{aligned} A^c &:= W \setminus A = \{w \in W : \neg\varphi(w)\}, \\ A \cup B &= \{w \in W : \varphi(w) \vee \psi(w)\}, \\ A \cap B &= \{w \in W : \varphi(w) \wedge \psi(w)\}, \\ A \subset B &\iff \big(\underset{w\in W}{\forall}\ \varphi(w) \Rightarrow \psi(w)\big), \\ A = B &\iff \big(\underset{w\in W}{\forall}\ \varphi(w) \iff \psi(w)\big). \end{aligned}$$

Si $A(x) := \{w \in W : \varphi(x, w)\}$, alors l'union et l'intersection de $A(x)$ pour $x \in X$, sont définies moyennant des quantificateurs existentiel et universel respectivement :

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{x\in X} A(x) &= \Big\{w \in W : \underset{x\in X}{\exists}\ \varphi(x, w)\Big\} \text{ et} \\ \textstyle\bigcap_{x\in X} A(x) &= \Big\{w \in W : \underset{x\in X}{\forall}\ \varphi(x, w)\Big\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y \in \textstyle\bigcup_{x\in X} Y_x &\iff \underset{x\in X}{\exists}\ y \in Y_x, \\ y \in \textstyle\bigcap_{x\in X} Y_x &\iff \underset{x\in X}{\forall}\ y \in Y_x, \end{aligned}$$

Le produit $\prod_{x\in X} Y_x$ est défini comme l'ensemble de $f : X \to \bigcup_{x\in X} Y_x$ telles que $f(x) \in Y_x$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$\textstyle\prod_{x\in X} Y_x := \Big\{f \in (\bigcup_{x\in X} Y_x)^X : \underset{x\in X}{\forall}\ f(x) \in Y_x\Big\}.$$

En particulier, si $Y = Y_x$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x\in X} Y = Y^X$.

Notons que l'axiome 2.2 du choix affirme que si $Y_x \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x\in X} Y_x \neq \varnothing$.

Pour tout $w \in X$, on définit la *projection* π_w est une application

$$\pi_w : \textstyle\prod_{x\in X} Y_x \to Y_w$$

définie par $\pi_w(f) := f(w)$.

Si $A \subset X$, alors la fonction $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A \end{cases} \tag{I.1}$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de A. Si $f : X \to \{0, 1\}$, alors $f = \chi_A$, où $A := \{x \in X : f(x) = 1\}$. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les parties de X et les fonctions de X dans un ensemble de deux éléments. C'est pourquoi on note 2^X l'ensemble de toutes les parties de X.

3. Relations, applications

Il découle des axiomes de la théorie des ensembles que pour deux ensembles X, Y il existe leur *produit* $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Si $R \subset X \times Y$, alors on dit que R est une *relation entre* X *et* Y. Traditionnellement on note $(x, y) \in R$ par xRy.

Pour tout $A \subset X$, l'*image* RA de A par R est définie par

$$RA := \big\{y \in Y : \underset{x \in A}{\exists} (x, y) \in R\big\}.$$

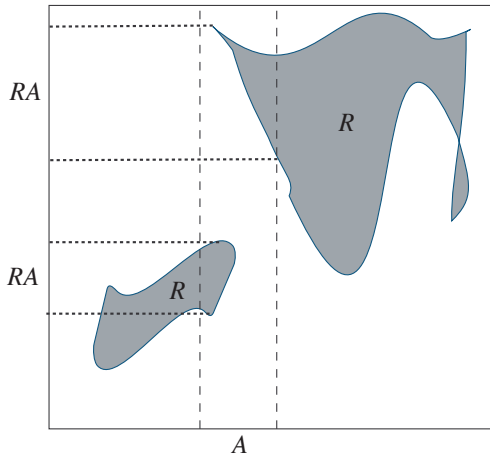


FIGURE I.2. L'image RA d'un ensemble A par la relation R (ici ayant deux composantes connexes) a, dans ce cas, également deux composantes.

Observons que l'image d'une partie de X par une relation $R \subset X \times Y$ est une partie de Y, donc un ensemble. Il s'ensuit que l'image $R\{x\}$ du singleton $\{x\}$ est un ensemble. Notons que

$$RA = \bigcup\nolimits_{x \in A} R\{x\}.$$

La *relation réciproque* R^{-1} de R (entre Y et X) est définie par

$$R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Comme R^{-1} est une relation, les symboles $R^{-1}B$ et $R^{-1}\{y\}$ ont un sens précis pour tout $B \subset Y$ et tout $y \in Y$. Bien sûr,

$$x \in R^{-1}\{y\} \iff y \in R\{x\}.$$

Pour tous $R \subset X \times Y, A \subset X$ et $B \subset Y$, les formules suivantes sont équivalentes :

$$RA \cap B \neq \varnothing, \tag{I.2}$$

$$A \cap R^{-1}B \neq \varnothing, \tag{I.3}$$

$$(A \times B) \cap R \neq \varnothing. \tag{I.4}$$

Si $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$, alors la *relation composée* $S \circ R$ (entre X et Z) est définie par

$$(S \circ R)A := S(RA)$$

pour tout $A \subset X$. Par conséquent, on abrège $SR := S \circ R$. Il s'ensuit que $z \in (S \circ R)\{x\}$ si et seulement s'il existe $y \in R\{x\}$ tel que $z \in S\{y\}$, c'est-à-dire $S^{-1}\{z\} \cap R\{x\} \neq \varnothing$.

Une relation $R \subset X \times Y$ est dite *surjective* si $RX = Y$; *injective* si $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} \neq \varnothing$ implique $x_0 = x_1$. En contraposant la définition, on obtient

Proposition 3.1. *Une relation est injective si et seulement si $x_0 \neq x_1$ implique $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} = \varnothing$.*

Nous avons déjà employé des applications sans en donner une définition formelle. Nous allons maintenant définir une application à partir d'une relation particulière. Une relation $R \subset X \times Y$ s'appelle *applicationnelle* si pour tout $x \in X$ il existe un élément $\widehat{R}(x)$ de Y tel que

$$R\{x\} = \{\widehat{R}(x)\}, \tag{I.5}$$

c'est-à-dire, si R est une relation applicationnelle, alors elle définit une *application* $\widehat{R} : X \to Y$ telle que (I.5).

On souligne que l'image d'une partie d'un ensemble par une application est un ensemble. En particulier, si R est applicationnelle, alors $R\{x\}$ est un singleton. Par contre, l'image $\widehat{R}(x)$ de x par l'application $\widehat{R}$ correspondante est un élément de Y.

On désigne par Y^X l'ensemble de toutes les applications de X dans Y. Si $f : X \to Y$ est une application, alors f définit une relation $\widetilde{f} \subset X \times Y$ telle que $\widetilde{f}\{x\} := \{f(x)\}$. Bien entendu, $\widetilde{f}^{-1}$ est également une relation (entre Y et X).

Proposition 3.2. *Une relation $R \subset X \times Y$ est applicationnelle si et seulement si la relation réciproque R^{-1} est injective et surjective.*

Si $f : X \to Y$, alors on appelle

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

le *graphe* de f.

Une application f est *injective* (respectivement, *surjective*) si la relation applicationnelle correspondante l'est. Par conséquent, f est *injective* si $f(x_0) = f(x_1)$ implique $x_0 = x_1$; *surjective* si $f(X) = Y$. Une application est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Si f est injective, alors $\widetilde{f}^{-1}$ est une relation applicationnelle entre $f(X)$ et X ; si f est bijective, alors $\widetilde{f}^{-1}$ est une relation applicationnelle de Y dans X (d'après la proposition I.3.2). On note f^{-1} l'application correspondante.

Si $f : X \to Y$ est une application, $X \subset X_1$ et $Y \subset Y_1$, alors on appelle un *prolongement* de f, toute application $f_1 : X_1 \to Y_1$ qui coïncide avec f sur X, c'est-à-dire $f_1(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 3.3. Dans la notation traditionnelle, $f(A)$ désigne l'ensemble $\{f(x) : x \in A\}$, c'est-à-dire $\widetilde{f}A$ dans notre notation ; de même, traditionnellement, $f^{-1}(B)$ dénote $\{x \in X : f(x) \in B\}$, c'est-à-dire $\widetilde{f}^{-1}B$ dans notre notation. La notation traditionnelle n'échappe pas à des incohérences, par exemple, $f^{-1}(y)$ peut signifier l'image réciproque de y par f (qui est un ensemble), ainsi que la valeur de y par l'application réciproque de f quand f est injective (qui est un élément). Néanmoins, afin de ne pas alourdir l'écriture, nous allons employer la notation traditionnelle, évitant des ambiguïtés grâce au contexte.

La *relation diagonale* $I := I_X \subset X \times X$ est définie par

$$I_X := \{(x, y) \in X \times X : x = y\}. \tag{I.6}$$

Autrement dit, $I_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Bien entendu $I_X\{x\} = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et, par conséquent, toute relation diagonale est applicationnelle, et l'application correspondante est l'*identité*, c'est-à-dire $i_X : X \to X$ telle que $i_X(x) := x$ pour tout $x \in X$.

Une relation $R \subset X \times X$ est dite *réflexive* si $I \subset R$, *symétrique* si $R^{-1} = R$, *antisymétrique* si $R \cap R^{-1} \subset I$, *transitive* si $RR \subset R$. Rappelons qu'une relation $R \subset X \times X$ est dite d'*équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique, et d'*ordre (large)* si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Soit R une relation d'équivalence sur X. On note X/R le *quotient* de X par R, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de R. Autrement dit,

$$X/R := \{R\{x\} : x \in X\}.$$

Puisque R est réflexive, $X = \bigcup_{x \in X} R\{x\}$. Définissons l'*application quotient* $\pi_R : X \to X/R$ par $\pi_R(x) := R\{x\}$. Autrement dit, π_R associe à tout $x \in X$ sa classe d'équivalence $R\{x\}$ par rapport à R. On voit facilement que

Proposition 3.4. *Toute application quotient est surjective.*

Exemple 3.5. Pour toute application $f : X \to Y$, la relation $\approx$ sur X définie par

$$x_0 \approx x_1 \iff f(x_0) = f(x_1), \tag{I.7}$$

est une relation d'équivalence, car la famille $\left\{f^{-1}\{y\} : y \in Y\right\}$ consiste de parties disjointes deux à deux, dont l'union est égale à X. La classe d'équivalence de x est $f^{-1}\{f(x)\}$. On note X/f le quotient par rapport à cette relation.

4. Suites

Une *suite* sur X est une application d'un ensemble dénombrable infini dans X. Si $f : A \to X$ est une suite (sur X), alors souvent on note $x_n := f(n)$ pour tout $n \in A$, et on désigne f comme $(x_n)_{n\in A}$. D'habitude l'ensemble des indices d'une suite est $\mathbb{N}$ tout entier et, dans ce cas, on la note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$. Souvent l'ensemble des indices est une partie infinie de $\mathbb{N}$, par exemple,

$$\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} : m \leq n\},$$

où $m \in \mathbb{N}$. [6]

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni de son ordre naturel. Cet ordre intervient dans la définition classique de la convergence d'une suite dans un espace métrique ou topologique, mais, comme nous verrons, il n'y est pas essentiel. En particulier, la permutation des indices d'une suite n'influe pas sur sa convergence. Nous allons décrire la convergence d'une suite en terme des parties cofinies de l'ensemble des indices.

Une partie A d'un ensemble Y est dite *cofinie* si $X \setminus A$ est fini.

Considérons les suites suivantes

(i) $$(\tfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}_1},$$

(ii) $$(0)_{n\in\mathbb{N}},$$

(iii) $$(\max\{\tfrac{(-1)^n}{n}, 0\})_{n\in\mathbb{N}_1}$$

(iv) $$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ fois}}, \ldots$$

(v) $$1, 1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ termes}}, \ldots$$

sur l'ensemble $\mathbb{R}$ (des nombres réels). Il y a une différence notable entre les suites ci-dessus. On considère les images réciproques des éléments de l'image de la suite.

(i) L'image réciproque de tout élément est un singleton, c'est-à-dire la suite est *injective*.

(ii) L'image réciproque du seul élément de l'image est infinie.

(iii) Il y a un élément, dont l'image réciproque est infinie et l'infinité d'autres ont les images réciproques finies [7].

(iv) L'image réciproque de tout élément est finie.

(v) Les images réciproques de tous les éléments sont infinies.

On dira qu'une suite f sur X est *libre* si

$$\{n : f(n) = x\}$$

6. En particulier, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où $\mathbb{N}^*$ est une notation traditionnelle assez répandue.

7. Par conséquent, l'image de la suite est infinie.

est finie pour tout $x \in X$.[8] Notons que l'image d'une suite libre est nécessairement infinie.

On appelle le *noyau* d'une suite $(x_n)_n$ l'ensemble

$$\ker_{n\to\infty} x_n := \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\}\,. \tag{I.8}$$

C'est un ensemble dénombrable (infini ou fini). Comme une conséquence immédiate des définitions,

Proposition 4.1. *Pour que $x \in \ker_{n\to\infty} x_n$ il faut et il suffit que $\{n \in \mathbb{N} : x = x_n\}$ soit infini.*

D'après la proposition 4.1,

Corollaire 4.2. *Une suite est libre si et seulement si son noyau est vide.*

Une suite $(x_n)_n$ est dite *principale* si son noyau $\ker_{n\to\infty} x_n$ n'est pas vide et $\{n : x_n \notin \ker_{k\to\infty} x_k\}$ est fini. Une suite $(x_n)_n$ est dite *stationnaire* s'il existe x tel que $\{n : x_n \neq x\}$ est fini. Bien entendu, toute suite stationnaire est principale.

Exemple 4.3. Le noyau de (ii) est fini non vide et celui de (v) est égal à $\mathbb{N}$, et tous les termes de ces suites appartiennent à leurs noyaux. Ce sont donc des suites principales.

Exemple 4.4. Les noyaux des suites (i) et (iv) sont vides, et par conséquent, les suites sont libres.

Exemple 4.5. La suite (iii) n'est ni principale ni libre. Effectivement, $\ker_{n\to\infty} x_n = \{0\}$, mais $\{n : x_n \neq 0\}$ est infini.

Théorème 4.6 (Décomposition de suites)**.** *Pour toute suite $(x_n)_n$ qui n'est ni principale ni libre, il existe deux ensembles infinis A et B tels que $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B = \varnothing$ de telle sorte que $(x_n)_{n\in A}$ est libre et $(x_n)_{n\in B}$ est principale.*

Démonstration. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas libre, alors son noyau $Q := \ker_{n\to\infty} x_n$ n'est pas vide. Bien entendu, $B := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Q\}$ est infini. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas principale, $A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin Q\}$ est infini. La suite $(x_n)_{n\in A}$ est libre, car son noyau

$$\bigcap\nolimits_{n\in A} \{x_k : k \in A, k \geq n\}$$

est inclus dans Q et, d'autre part, $\{x_n : n \in A\} \cap Q = \varnothing$. La suite $(x_n)_{n\in B}$ est principale, car son noyau est égal à Q et, en plus, si $n \notin B$, alors $x_n \notin Q$. □

Une suite $(y_k)_k$ est dite *extraite* de $(x_n)_n$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty \text{ et } y_k = x_{f(k)}$$

8. En anglais, *finite-to-one*.

pour tout $k \in \mathbb{N}_m$.

Une suite $(y_k)_k$ est dite *strictement extraite* (c'est-à-dire *suite extraite* au sens traditionnel) de $(x_n)_n$ s'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_k = x_{f(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Bien entendu, toute suite strictement extraite est une suite extraite. D'autre part,

Proposition 4.7. *Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors il existe une suite extraite de $(y_k)_k$ qui est une suite strictement extraite de $(x_n)_n$.*

Démonstration. Soit m et $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$ telle que et $y_k = x_{f(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_m$ et $\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe le premier $k = h(p)$ tel que

$$f(h(p)) > \max\{f(k) : k < p\}.$$

Il est clair que $h(p) < h(p+1)$ et $f(h(p)) < f(h(p+1))$. Ainsi $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_m$ et $f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont strictement croissantes, donc $(x_{h(p)})_p$ est une suite strictement extraite de $(y_k)_k$ et $(x_{f\circ h(p)})_p$ est une suite strictement extraite de $(x_n)_n$. □

Proposition 4.8. *Soit $(y_k)_k$ et $(x_n)_n$ deux suites libres dans X. Alors $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ si et seulement si*

$$\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est fini.

Démonstration. Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{y_k : k \in \mathbb{N}_m\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi $\{y_k : k < m\}$ est fini. Réciproquement, si la condition est remplie, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{y_k : k \in \mathbb{N}_m\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donc pour $k \in \mathbb{N}_m$, on pose $f(k) = n$ si $y_k = x_n$. Ceci définit une application f, car les suites sont libres. Bien entendu, f est strictement croissante. □

Proposition 4.9. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties dénombrables infinies telle que $A_{n+1} \setminus A_n$ est finie pour tout n. Alors il existe une partie infinie A_∞ telle que $A_\infty \setminus A_n$ est finie pour tout n.* [9]

Démonstration. Soit $a_0 \in A_0$. Pour tout n il existe

$$a_n \in \bigcap\nolimits_{p=0}^{n} A_p \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\},$$

car cette partie est infinie. Alors $A_\infty := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ a la propriété requise. En effet, si $n \leq p$ alors $a_p \in A_n$, donc $A_\infty \setminus A_n \subset \{a_0, \ldots, a_n\}$. □

Corollaire 4.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(x_k^n)_k$ une suite dans X de telle sorte que $(x_k^{n+1})_k$ est une suite extraite de $(x_k^n)_k$. Alors il existe une suite $(x_k^\infty)_k$ dans X qui est extraite de $(x_k^n)_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

9. Une telle partie A_∞ s'appelle une *presque-intersection* de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Cardinalité

Disons de façon informelle que la cardinalité d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Deux ensembles finis ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre eux. Ce fait devient la définition de cardinalité d'ensemble arbitraire.

Deux ensembles X, Y sont dits *équipotents* ($X \sim Y$) s'il existe une bijection $f : X \to Y$. Si X, Y, Z sont trois ensembles, alors $X \sim X$ (réflexivité), si $X \sim Y$ alors $Y \sim X$ (symétrie), et $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ entraîne $X \sim Z$ (transitivité). Par conséquent, l'*équipotence* est une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles.

Une classe d'équivalence des ensembles équipotents s'appelle un *nombre cardinal*. On désigne $\operatorname{card} X$ (ou $|X|$) la classe des ensembles équipotents à laquelle appartient X, c'est-à-dire la *cardinalité* de X.

Traditionnellement on utilise les caractères minuscules grecs, du milieu de l'alphabet [10], κ, λ, μ,... pour désigner des cardinaux.

Soit κ, λ deux cardinaux. Par définition,

$$\kappa \leq \lambda \tag{I.9}$$

s'il existe une application injective $f : X \to Y$ pour deux ensembles X et Y tels que $\kappa = \operatorname{card} X$ et $\lambda = \operatorname{card} Y$.

Bien entendu, si X_0 et Y_0 sont deux autres ensembles tels que $\kappa = \operatorname{card} X_0$ et $\lambda = \operatorname{card} Y_0$, alors il existe une injection $f_0 : X_0 \to Y_0$. Effectivement, si $g : X_0 \to X$ et $h : Y_0 \to Y$ sont des bijections, alors $h^{-1} \circ f_0 \circ g$ est une injection de X_0 dans Y_0.

On peut également caractériser (I.9) en termes de surjections.

Proposition 5.1. *Soit X, Y deux ensembles. Alors* $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ *si et seulement s'il existe une application surjective $g : Y \to X$.*

Démonstration. Soit $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$, c'est-à-dire il existe une injection $f : X \to Y$. Ainsi pour tout $y \in f(X)$ il existe un unique $x \in X$ avec $y = f(x)$. Soit $g : Y \to X$ une application telle que $g(y) := x$ s'il existe $x \in X$ avec $y = f(x)$. [11] Alors g est une surjection.

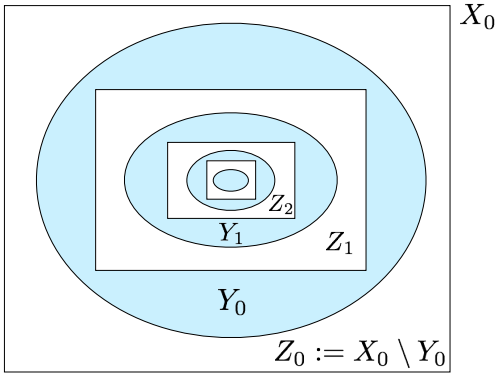
Réciproquement, si $g : Y \to X$ est une surjection, c'est-à-dire si $g^{-1}(x) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$, alors d'après l'axiome 2.2 du choix, pour tout $x \in X$ il existe $f(x) \in g^{-1}(x)$. Comme $g^{-1}(x_0) \cap g^{-1}(x_1) = \varnothing$ si $x_0 \neq x_1$, l'application $f : X \to Y$ ainsi définie est une injection. □

Ainsi, $\leq$ est une relation sur la classe des cardinaux. Il est immédiat qu'elle est réflexive et transitive. Le théorème suivant affirme qu'elle est également antisymétrique.

Théorème 5.2 (Cantor-Bernstein)**.** *Si $\kappa \leq \lambda$ et $\lambda \leq \kappa$, alors $\lambda = \kappa$.*

10. En réservant plutôt les premiers caractères α, β, γ, etc... pour les nombres ordinaux.
11. Implicitement, $g(y)$ est un élément arbitraire de X si $y \in Y \setminus f(X)$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\lambda \leq \kappa$ il existe deux ensembles X et Y tels que $\operatorname{card} X = \kappa, \operatorname{card} Y = \lambda$ et $Y \subset X$. D'autre part, $\kappa \leq \lambda$, c'est-à-dire il existe une application injective $f : X \to Y$.



Notons $X_0 := X, Y_0 := Y, Z_0 := X_0 \setminus Y_0$ et

$$X_{n+1} := f(X_n), Y_{n+1} := f(Y_n) \text{ et } Z_{n+1} := f(Z_n).$$

Comme f est injective,

$$Z_1 = f(Z_0) = f(X_0 \setminus Y_0) = f(X_0) \setminus f(Y_0) = X_1 \setminus Y_1,$$

et, plus généralement, $Z_n = X_n \setminus Y_n$. Soit $Z := \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$. Donc

$$f(Z) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(Z_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = Z \setminus Z_0.$$

De plus, $Z_n \cap Z_k = \varnothing$ si $n \neq k$.

Définissons $h : X \to Y$ par

$$h(x) := \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in Z, \\ x, \text{ si } x \notin Z. \end{cases}$$

La fonction h est injective, car $f(Z) \subset Z$ est la restriction de f à Z est injective, et l'identité est injective sur $X \setminus Z$. La fonction h est surjective sur Y. Effectivement, puisque h est injective,

$$\begin{aligned} h(X) &= h(Z \cup (X \setminus Z)) = f(Z) \cup X \setminus Z \\ &= (Z \setminus Z_0) \cup (X \setminus Z) = X \setminus Z_0 = Y. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\kappa = \lambda$. □

Par conséquent, la relation $\leq$ sur les cardinaux est un ordre. On note $\kappa < \lambda$ si $\kappa \leq \lambda$ et $\kappa \neq \lambda$.

Un ensemble X est dit *fini* si toute application injective $f : X \to X$ est surjective.

L'ensemble vide $\varnothing$ est fini, car la seule application $f : \varnothing \to \varnothing$ est surjective [12]. On note $0 := \operatorname{card} \varnothing$. L'ensemble $\{\varnothing\}$ est fini, car la seule application $f : \{\varnothing\} \to \{\varnothing\}$ est une bijection. On définit $1 := \operatorname{card}\{\varnothing\} = \operatorname{card}\{0\}$, $2 := \operatorname{card}\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \operatorname{card}\{0, 1\}$ et ainsi de suite [13].

D'après l'exercice 12, tout ensemble ainsi construit est fini et, réciproquement, tout ensemble fini est équipotent à un tel ensemble.

On appelle *aleph zéro* et on note $\aleph_0$ la cardinalité de $\mathbb{N}$. C'est un ensemble infini, car l'application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $s(n) := n + 1$ est injective, mais n'est pas surjective, puisque $0 \notin s(\mathbb{N})$.

Un ensemble de cardinalité $\aleph_0$ est dit *dénombrable infini.*

Proposition 5.3. *$\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.*

Démonstration. Puisque aucune application de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dans $\mathbb{N}$ est surjective, $\operatorname{card}\mathbb{N} > n$. Si X est un ensemble infini, alors il existe $x_0 \in X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Donc d'après la proposition 5.1, $\aleph_0 = \operatorname{card}\mathbb{N} \leq \operatorname{card} X$. □

On définit la *somme* $\kappa + \lambda$, le *produit* $\kappa \cdot \lambda$ et la *puissance* λ^κ de deux nombres cardinaux κ et λ par

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &:= \operatorname{card}(X \cup Y) \text{ si } X \cap Y = \varnothing, \\ \kappa \cdot \lambda &:= \operatorname{card}(X \times Y), \\ \lambda^\kappa &:= \operatorname{card}(Y^X), \end{aligned}$$

où $\kappa = \operatorname{card} X$ et $\lambda = \operatorname{card} Y$. L'exercice 13 montre que ces définitions ne dépendent pas des représentants particuliers X de κ et Y de λ.

Il s'ensuit que les opérations $+$ et $\cdot$ sont associatives, commutatives et distributives, une par rapport à l'autre.

On note que [14]

$$\begin{aligned} (\kappa \cdot \lambda)^\mu &= \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu, \\ \kappa^{\lambda+\mu} &= \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, \\ (\kappa^\lambda)^\mu &= \kappa^{\lambda \cdot \mu}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \begin{cases} \kappa + \mu \leq \lambda + \mu, \\ \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu, \\ \kappa^\mu \leq \lambda^\mu, \end{cases} \tag{I.10}$$

12. Effectivement, le produit $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$ a une seule partie $\varnothing$, donc il existe une seule relation binaire sur $\varnothing$. Comme sa relation réciproque est injective et surjective, $\varnothing$ est applicationnelle. D'ailleurs elle correspond à une application bijective.

13. Cette définition des nombres naturels est due à von Neumann.

14. Il faut bien distinguer $\kappa^{\lambda^\mu} := \kappa^{(\lambda^\mu)}$ et $(\kappa^\lambda)^\mu$. Par exemple, $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$ est la cardinalité de l'ensemble de toutes les familles de parties de X, tandis que $(2^2)^{\aleph_0} = 2^{2 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

ainsi que

$$0 < \kappa \leq \lambda \Longrightarrow \mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}. \tag{I.11}$$

Cependant $\kappa < \lambda$ n'implique pas des inégalités strictes dans (I.10) et (I.11) (Voir l'exercice 14).

Proposition 5.4. $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$.

Démonstration. Bien sûr, $\aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$. Puisque $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, afin de parachever la preuve, il suffit de construire une fonction injective $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Soit $S(n) := \sum_{k=0}^{n} k$ et, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$f(p, q) := S\,(p + q) + p.$$

Montrons que f est injective. Supposons que $f(p_0, q_0) = f(p_1, q_1)$. Si $p_0 = p_1$, alors $S\,(p_0 + q_0) = S(p_1 + q_1)$ et comme S est une application injective, $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$, d'où $q_0 = q_1$. Si $p_0 \neq p_1$, par exemple, $p_0 > p_1$, alors $S(p_1 + q_1) > S(p_0 + q_0)$, donc

$$p_0 \geq p_0 - p_1 = S(p_1 + q_1) - S(p_0 + q_0) \geq p_0 + q_0 + 1,$$

d'où $-1 \geq q_0$, une contradiction. □

Il s'ensuit que $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \aleph_0$ car $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$.

Corollaire 5.5. $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$.

Démonstration. Comme tout rationnel admet (au moins) une représentation de la forme $\frac{k}{n}$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}_1$, l'application $(k, n) \longmapsto \frac{k}{n}$ est surjective de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$ sur $\mathbb{Q}$, donc $\aleph_0 \geq \operatorname{card} \mathbb{Q} \geq \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$, car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. □

Proposition 5.6. *Si κ est un cardinal, alors*

$$\kappa^0 = 1,$$
$$1^{\kappa} = 1,$$
$$\kappa > 0 \Longrightarrow 0^{\kappa} = 0.$$

Démonstration. Par définition, κ^0 est la cardinalité de l'ensemble des applications du domaine vide dans un ensemble Y de cardinalité κ. L'ensemble $\varnothing \times Y = \varnothing$ admet une seule partie $\varnothing$ ($\operatorname{card} 2^{\varnothing \times Y} = 1$), c'est-à-dire il y a une seule relation $\varnothing$ dans $\varnothing \times Y$. Cette relation est une application, car elle est injective et $\varnothing^{-1}(Y) = \varnothing$.

Par définition, 1^{κ} est l'ensemble des applications d'un ensemble X de cardinalité κ dans un ensemble de cardinalité 1, par exemple, $\{0\}$. Il y a une seule relation R dans $X \times \{0\}$ pour laquelle $R^{-1}\{0\} = X$, et c'est $R := X \times \{0\}$. Étant injective, c'est une application, donc $1^{\kappa} = 1$.

Enfin, 0^{κ} est la cardinalité de l'ensemble des applications d'un ensemble non vide X ($\operatorname{card} X > 0$) dans $\varnothing$. Il y a une seule relation dans $\varnothing = X \times \varnothing$, notamment $\varnothing$ et ce n'est pas une application, car $\varnothing = \varnothing^{-1}\varnothing \neq X$, donc $0^{\kappa} = 0$. □

Théorème 5.7 (Cantor). *Si κ est un cardinal, alors $\kappa < 2^\kappa$.*

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble de cardinalité κ. Puisque $h : X \to 2^X$ donnée par $h(x) := \{x\} \in 2^X$ est injective, $\kappa \leq 2^\kappa$. Si $f : X \to 2^X$ est une application, alors f n'est pas surjective, car

$$\{x \in X : x \notin f(x)\}$$

n'est pas dans $f(X)$. Supposons qu'au contraire, il existe $y \in X$ tel que $f(y) = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Par conséquent, $y \in f(y)$ si et seulement si $y \notin f(y)$, ce qui est une contradiction. □

Il s'ensuit qu'il y a une infinité de cardinaux infinis, car si κ est un cardinal infini, par exemple, $\kappa = \aleph_0$, alors les cardinaux

$$\kappa < 2^\kappa < 2^{2^\kappa} < 2^{2^{2^\kappa}} < \dots$$

sont tous différents. Nous avons déjà observé à propos du paradoxe 2.1 de Russell, qu'il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles. C'est aussi une conséquence immédiate du théorème 5.7, qui également implique que

Corollaire 5.8. *Il n'existe pas la cardinalité la plus grande.*

6. Le continu

Rappelons que $\mathbb{R}$ est complet au sens que toute partie non vide majorée (respectivement, minorée) A de $\mathbb{R}$ a la borne supérieure $\sup A \in \mathbb{R}$ (respectivement, inférieure $\inf A \in \mathbb{R}$) [15].

Proposition 6.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'au contraire il existe une suite $(r_n)_n$ telle que $\mathbb{R} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit n_1 le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_0 < r_{n_1}$. Soit n_2 le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_0 < r_{n_2} < r_{n_1}$.

On construit ainsi, par récurrence, une suite $(r_{n_k})_k$ strictement extraite de $(r_n)_n$ telle que n_{k+2} est le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_{n_{k+2}}$ est entre r_{n_k} et $r_{n_{k+1}}$. Par conséquent,

$$r_0 < r_{n_{2k}} < \dots < r_{n_{2k+1}} < r_{n_1}.$$

Puisque toute partie majorée admet la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et toute partie minorée admet la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} r_{n_{2k}} \leq r \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} r_{n_{2k+1}}.$$

D'après la construction, $r \notin \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Une contradiction. □

On note $\mathfrak{c}$ la cardinalité de la *droite réelle* $\mathbb{R}$, et on l'appelle le *continu*. La proposition 6.1 montre que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. On prouvera dans la proposition 6.4 un résultat plus précis, à savoir, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

15. Voir l'annexe A pour les définitions.

L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}$, appelé le *cube de Cantor,* est, par définition, l'ensemble de toutes les applications f sur un ensemble dénombrable infini à valeurs dans $\{0,1\}$:

$$f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow f : \mathbb{N} \to \{0,1\},$$

donc peut être identifié, moyennant la fonction caractéristique (I.1), avec l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$. Bien entendu, $\mathrm{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}$.

L'*ensemble de Cantor* C est composé des nombres réels r, dont une représentation ternaire vérifie

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{3^n} \text{ et } \underset{n\in\mathbb{N}_1}{\forall} r(n) \in \{0,2\}. \tag{I.12}$$

Par conséquent, $C \subset [0,1]$.

Proposition 6.2. *Tout élément de l'ensemble de Cantor C admet une représentation unique de la forme* (I.12).

Démonstration. Soit r, s deux éléments de C. Bien entendu, $r(n)$ et $s(n)$, pour $n \in \mathbb{N}_1$, sont les termes de leurs représentations ternaires (I.12) respectives. On note $\#(r,s)$ le premier $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $r(n) \neq s(n)$ et $\#(r,s) = \infty$ si $r = s$. Par conséquent, si $r, s \in C$ et $r < s$, alors il existe n avec $1 \leq n < \infty$ et $n = \#(r,s)$. Donc $r(n) = 0$ et $s(n) = 2$. J'affirme que

$$\min\{s - r : \#(r,s) = n\} = \frac{1}{3^n}.$$

Si $r < s$ et $n = \#(r,s)$, alors [16]

$$\begin{aligned} s - r &= \frac{2}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s(k) - r(k)}{3^k} \\ &\geq \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n}. \end{aligned} \tag{I.13}$$

Cette minoration atteint sa borne pour $r(n) = 0$ et $r(k) = 2$ pour tout $k > n$ et $s(n) = 2$ et $s(k) = 0$ pour tout $k > n$. □

L'ensemble des $r \in [0,1]$ pour lesquels $r(1) \neq 1$ est (niveau 1) ci-dessous, de ceux pour lesquels $r(1) \neq 1$ et $r(2) \neq 1$ est (niveau 2) et ainsi de suite. Par conséquent, C est l'intersection des unions des niveaux suivants

(niveau 0) $$I := [0,1]$$

(niveau 1) $$I_0 := \left[0, \tfrac{1}{3}\right],\ I_1 := \left[\tfrac{2}{3}, 1\right]$$

(niveau 2) $$I_{0,0} := \left[0, \tfrac{1}{9}\right],\ I_{0,1} := \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right],\ I_{1,0} := \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right],\ I_{1,1} := \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]$$

$$\dots$$

(niveau n) $$\left[0, \tfrac{1}{3^n}\right],\ \left[\tfrac{2}{3^n}, \tfrac{3}{3^n}\right],\ \dots\ \left[\tfrac{3^n-3}{3^n}, \tfrac{3^n-2}{3^n}\right],\ \left[\tfrac{3^n-1}{3^n}, 1\right]$$

16. La série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Par exemple, si $\#(r,s)=1$, c'est-à-dire $r(1)\neq s(1)$, alors r et s appartiennent à deux intervalles différents du premier niveau ; si $\#(r,s)=2$, alors $r(1)=s(1)$ et $r(2)\neq s(2)$, alors r et s appartiennent au même intervalle du premier niveau et à deux intervalles différents du deuxième niveau [17].

Proposition 6.3. *L'ensemble de Cantor est équipotent au cube de Cantor.*

DÉMONSTRATION. L'application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans C donnée par

$$F(f):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2f(n)}{3^{n+1}}$$

est surjective, d'après la définition de l'ensemble de Cantor (I.12), et injective, grâce à la proposition 6.2. □

Théorème 6.4. $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons définir $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{Q}}$. Posons $F(r):=\{f_r(n):n\in\mathbb{N}\}$, où $f_r:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ est injective et telle que $r=\lim_{n\to\infty}f_r(n)$ [18]. Si $r_0\neq r_1$, alors

$$\{f_{r_0}(n):n\in\mathbb{N}\}\cap\{f_{r_1}(n):n\in\mathbb{N}\}$$

est fini, et en conséquence $f_{r_0}\neq f_{r_1}$. Donc $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{Q}}$ est injective, donc $\mathfrak{c}=\operatorname{card}\mathbb{R}\leq\operatorname{card}2^{\mathbb{Q}}=2^{\aleph_0}$. Puisque l'ensemble de Cantor C est une partie de $\mathbb{R}$, $2^{\aleph_0}=\operatorname{card}C\leq\operatorname{card}\mathbb{R}=\mathfrak{c}$. Donc, d'après le théorème 5.2 de Cantor-Bernstein, $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. □

Corollaire 6.5. $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\aleph_0\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^{\aleph_0}$. [19]

DÉMONSTRATION. Bien évidemment, d'après (I.10),

$$\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\leq\aleph_0\cdot\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c},$$

puisque $1\leq 2\leq\aleph_0\leq\mathfrak{c}$, et $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^2\leq\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, car $2\leq\aleph_0$.

D'autre part, d'après la proposition 5.4 et le théorème 6.4, $\mathfrak{c}^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$. □

Il s'ensuit, par exemple, que le nombre des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ est le même que le nombre des suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui est le même que le nombre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercices

Solutions : pages 269-277.

(1) ⋆ Soit $P,R\subset X\times Y$. Vérifier que

(a) $(R^{-1})^{-1}=R$,

(b) $P\subset R\Longrightarrow P^{-1}\subset R^{-1}$,

17. Observons que si $r\in C$, alors $\{r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}I_{\frac{r(1)}{2},\frac{r(2)}{2},\ldots,\frac{r(n)}{2}}$.

18. Bien sûr, il y a beaucoup de suites vérifiant cette condition.

19. Ce corollaire découle d'un fait plus général (théorème A.5.6 à venir).

(c) $R^{-1}B = \{x \in X : R\{x\} \cap B \neq \varnothing\}$.

(2) $\star$ Soit X, Y deux ensembles et $R \subset X \times Y$. Montrer que

(a) si $A_j \subset X$ pour tout $j \in J$, alors $R(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} RA_j$,

(b) il existe R telle que $R(A \cap B) \neq RA \cap RB$,

(c) si R est injective, alors $R(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} RA_j$,

(d) sont équivalentes :

(i) $$RA \cap B \neq \varnothing,$$

(ii) $$A \cap R^{-1}B \neq \varnothing,$$

(iii) $$(A \times B) \cap R \neq \varnothing.$$

(3) Soit X, Y, Z ensembles, $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$. Montrer que

(a) si $A \subset X$ et $C \subset Z$, alors
$$C \cap (S \circ R)A \neq \varnothing \iff RA \cap S^{-1}C \neq \varnothing,$$

(b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(4) $\star$ Soit $f : X \to Y$ et $A_j \subset X$, $B_k \subset Y$ pour tous les $j \in J$ et $k \in K$. Montrer que

(a) $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} fA_j$,

(b) $f^{-1}(\bigcup_{k\in K} B_k) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(c) $f^{-1}(\bigcap_{k\in K} B_k) = \bigcap_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(d) si $A \subset X$ et $B \subset Y$, alors
$$A \subset \left(f^{-1} \circ f\right) A,\ (f \circ f^{-1})B \subset B.$$

(5) Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une fonction f moyennant les compositions $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$.

(6) Soit $R \subset X \times Y$. Par définition, pour $A \subset X$, la *polaire* de A par R est $R^*A := \bigcap_{x\in A} R(x)$. Montrer

(a) les équivalences :
$$B \subset R^*A,$$
$$A \subset (R^{-1})^*B,$$
$$A \times B \subset R,$$

(b) $R^*(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} R^*A_j$.

(7) Soit $R \subset X \times X$ et $I \subset X \times X$, la relation diagonale (I.6). Vérifier que

(a) $R \circ I = I \circ R = R$,

(b) R est symétrique $\iff R \subset R^{-1} \iff R^{-1} = R$,

(c) R est transitive $\iff R \circ R \subset R$,

(d) R est réflexive $\iff I \subset R$,

(e) R est une équivalence $\iff R$ est réflexive et $R^{-1} \circ R \subset R$.

(8) Toute application f admet une décomposition $f = h \circ g$, telle que g est surjective et h est injective.

(9) Montrer que

(a) $f : X \to Y$ est surjective si et seulement s'il existe une application injective $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = i_Y$, l'identité sur Y (g est dite une *application quasi-réciproque* ou une *section* de f).

(b) s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = i_X$ (une telle g s'appelle une *rétraction* de f), alors f est injective et g est surjective.

(10) $\star$ Calculer le noyau des suites suivantes et déterminer si elles sont libres ou stationnaires :

(a) $x_n := \max\left\{(-\frac{1}{n})^n, 0\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$,

(b) $y_k := \frac{1}{n}$ si $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $k \in \mathbb{N}$,

(c) $z_k := \frac{2}{2k-(n-1)n+2}$ si $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $k \in \mathbb{N}$.

(11) Montrer que tout intervalle de longueur non nulle de $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

(12) Montrer que

(a) si X est un ensemble fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{card} X = n$,

(b) si X est un ensemble fini et si $y \notin X$, alors $X \cup \{y\}$ est fini,

(c) toute union finie d'ensembles finis et finie,

(d) tout produit fini d'ensembles finis est fini,

(e) si X, Y sont finis, alors Y^X est fini.

(13) $\star$ Si X_0 équipotent à X_1 et Y_0 équipotent à Y_1, alors

(a) si $X_0 \cap Y_0 = \varnothing$ et $X_1 \cap Y_1 = \varnothing$, alors $X_0 \cup Y_0$ est équipotent à $X_1 \cup Y_1$.

(b) $X_0 \times Y_0$ est équipotent à $X_1 \times Y_1$.

(c) ${Y_0}^{X_0}$ est équipotent à ${Y_1}^{X_1}$.

(14) Soit κ, λ, μ des nombres cardinaux.

(a) Montrer que si $\kappa \leq \lambda$, alors

(i) $$\kappa + \mu \leq \lambda + \mu,$$

(ii) $$\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu,$$

(iii) $$\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu},$$

(iv) $$\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda} \text{ si } 0 < \kappa \leq \lambda.$$

(b) Observer que $\kappa < \lambda$ n'implique pas les inégalités strictes dans (i)-(iv).

(c) Montrer que

(v) $$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu},$$

(vi) $$(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

(15) $\star$ Combien y a-t-il de

(a) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(b) parties finies de $\mathbb{N}$?

(c) suites à valeurs dans $\{0, 1\}$?

(d) suites à valeurs dans $\mathbb{N}$?

(e) suites à valeurs dans $\mathbb{R}$?

(f) polynômes à coefficients entiers ?

(g) nombres algébriques ?

(16) Soit A, B deux parties infinies dénombrables de X. On dit que A et B sont *presque disjointes* si $A \cap B$ est finie ; B est *presque incluse* dans A si $B \setminus A$ est finie (en symboles, $B \subset^* A$). A et B sont dits *presque égaux* ($A =^* B$) si $B \subset^* A$ et $A \subset^* B$. Montrer que

(a) deux parties sont presque égales si et seulement si la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est finie,

(b) la relation $=^*$ est une relation d'équivalence,

(c) deux suites libres n'ont aucune suite extraite commune si et seulement si leurs images sont presque disjointes.

(17) Soit X un ensemble infini dénombrable. Une famille $\mathcal{A}$ de parties infinies est dite *presque disjointe* si A_0, A_1 sont presque disjointes pour chaque couple A_0, A_1 d'éléments distincts de $\mathcal{A}$. Une famille $\mathcal{A}$ presque disjointe est dite *maximale* si pour toute partie (infinie) A_∞ de X, $\mathcal{A} \cup \{A_\infty\}$ n'est pas presque disjointe. Montrer que

(a) si $\mathcal{A} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite presque disjointe de termes distincts, alors il existe une partie $A_\infty \notin \mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} \cup \{A_\infty\}$ est presque disjointe,

(b) si $\mathcal{A}$ est une famille presque disjointe, alors il existe une famille presque disjointe maximale $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ [20],

(c) une famille $\mathcal{A}$ est presque disjointe maximale si et seulement pour toute partie infinie B il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \cap A$ est infinie,

(d) si $\mathcal{A}$ est une famille infinie presque disjointe maximale, alors $\operatorname{card} \mathcal{A} > \aleph_0$,

(e) il existe sur X une famille presque disjointe de cardinalité $\mathfrak{c}$ [21].

20. Appliquer le lemme 2.3 de Zorn-Kuratowki.

21. Indication : tout ensemble dénombrable infini X est équipotent à $\mathbb{Q}$. Considérer une famille de suites sur $\mathbb{Q}$, dont les limites sont distinctes.