Analyse Fondamentale
deuxième édition revue et augmentée
Errata (deuxième tirage) à partir du mois de novembre 2013

page/ligne ou formule	est	devrait être
11, Proposition 5.1	Soit X, Y deux ensembles.	Soit X, Y deux ensembles non vides.
66^7	$f(x) \notin f(H)$	$f(x) \notin \mathrm{cl}_Y\, f(H)$.
66_{10}	$x \notin f_0^{-1}(\mathrm{cl}\, f(X \setminus O))...,$	$x \notin f_0^{-1}(\mathrm{cl}\, f_0(X \setminus O)...,$
78^9	tel que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset A$	tel que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset O$
104 Corollaire 4.5	rationnels	irrationnels
120_{10}	$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$
113^{15-19}	*Les deux phrases montrent la même implication.*	*Inserrer le texte (**)*
136 Théorème 1.7	Démonstration	à remplacer (voir dessous)
158_{11}	Ils s'avère	Il s'avère
161^{12}	est convergente. Donc	converge vers 0. Donc
226_1	mais	où $\mathcal{B}^{\uparrow} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{H \subset X : B \subset H\}$, mais
231_9	$\lim_Y$	$\lim_{\beta X}$
231_5	$X \setminus A \notin \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}^\flat$	$X \setminus A \notin \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}$
$232^{7,12}$	adh_Y	$\mathrm{adh}_{\beta X}$
$232^{9,12}$	cl_Y	$\mathrm{cl}_{\beta X}$
232^{11}	$\lim_Y$	$\lim_{\beta X}$
247^{20}	admet un recouvrement localement fini	admet un recouvrement σ-localement fini
248 (C10)	$\gamma_{\mathcal{T}} := \mathrm{card}\, \mathcal{T} \cdot \max\left(0, \min_{f \in \mathcal{T}} f - \sup_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}} f\right)$	$\gamma_{\mathcal{T}}(x) := \mathrm{card}\, \mathcal{T} \cdot \max\left(0, \min_{f \in \mathcal{T}} f(x) - \sup_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}} f(x)\right)$
252^{18}	de X. Cela	de X pour tout x et tout $f_0 \in \mathcal{F}$. Cela
252^{19}	plus fine	moins fine
252^{21}	montrer qu'elle	montrer que B
252^{24}	plus fine	moins fine
252_5	$:= \sum_{B \in \mathcal{B}_n} f_B$	$f_n := \sum_{B \in \mathcal{B}_n} f_B$
253^1	on en déduit	des théorèmes 3.5 et 4.3 on déduit
$267_6, (4)$	(théorème de Soit	(théorème de Luzin) Soit
291, Exercice III.17	ensemble non dénombrables	ensemble non dénombrable
318^7	continue.	*Inserrer le texte (*)*
318^8	$f_n : [a_n, b_n \to X$	$f_n : [a_n, b_n] \to X$
320_{13}	$b_0 \leq a_{n_1} \leq b_{n_1}$	$b_0 < a_{n_3} \leq b_{n_3}$
320_{11}	$\bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} [a_n, b_n]$	$\bigcup_{n=0}^{n_1} [a_n, b_n]$
320_{10}	and	et
351^{21}	$(X \setminus \mathbb{N}) \cap (X \setminus \mathbb{N}) = \varnothing$	$(X \setminus \mathbb{N}) \cap (Y \setminus \mathbb{N}) = \varnothing$

(*) Puisque X est connexe et localement connexe par arcs, il est connexe par arcs, car si $J(x)$ désigne l'ensemble des éléments de X joignables par un arc à partir de $x \in X$, alors on observe que $J(x)$ est à la fois fermé et ouvert. Effectivement, si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $J(x)$ et $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ et V est un voisinage connexe par arcs de x_∞, alors il existe n tel que $x_n \in V$, donc $x_\infty \in J(x)$. D'autre part, pour tout $w \in J(x)$ il existe un voisinage connexe par arcs V de w, donc $V \subset J(x)$. Comme X est connexe, $J(x) = X$, ce qui prouve la connexité par arcs de X.

(**) Réciproquement, s'il existe deux fermés disjoints non vides F_0 et F_1, alors la fonction $f : X \to \{0,1\}$ telle que $f(x) := 0$ si $x \in F_0$ et $f(x) := 1$ si $x \in F_1$, est continue et n'est pas constante.

Lemme. *Si V est une partie libre et W est une partie génératrice d'un espace vectoriel, alors il existe $W_0 \subset W$ telle que $V \cup W_0$ est une base (et $V \cap W_0 = \varnothing$).*

Démonstration. Soit X un espace vectoriel. Si V est une base de X, alors $W_0 := \varnothing$. Sinon, il existe $w \in W \setminus \operatorname{vect} V$. Il s'ensuit que $V \cup \{w\}$ est libre. Le résultat suit par récurrence (transfinie si W est infinie). ∎

Théorème. *Toutes les bases d'un espace vectoriel ont la même cardinalité.*

Démonstration. Soient B, W deux bases de X. Si $X = \{0\}$, alors toute base de X est vide. Si B est non vide, alors, en vertu du théorème de Zermelo, il existe un ordinal β tel que $B = \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ et b_α sont tous différents. Puisque $B \setminus \{b_0\}$ est une famille libre non génératrice, d'après le lemme, il existe une partie W_0 de W telle que $(B \setminus \{b_0\}) \cup W_0$ est une base de X et $(B \setminus \{b_0\}) \cap W_0 = \varnothing$. Soit $\gamma < \beta$ et

$$B_\gamma := \{b_\alpha : \gamma \leq \alpha < \beta\}.$$

Par récurrence sur γ, supposons qu'il existe une famille $\{W_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de parties disjointes non vides de W telle que $B_\gamma \cup \bigcup_{\alpha<\gamma} W_\alpha$ est une base de X et pour $\delta < \gamma$,

$$W_\delta \cap (B_\gamma \cup \bigcup\nolimits_{\delta\neq\alpha<\gamma} W_\alpha) = \varnothing.$$

Il s'ensuit que $\{b_\alpha : \gamma < \alpha < \beta\} \cup \bigcup_{\alpha<\gamma} W_\alpha$ est libre et non génératrice, donc d'après le lemme, il existe une partie non vide W_γ de W telle que $\{b_\alpha : \gamma < \alpha < \beta\} \cup \bigcup_{\alpha\leq\gamma} W_\alpha$ est une base de X et $W_\gamma \cap (\{b_\alpha : \gamma < \alpha < \beta\} \cup \bigcup_{\alpha<\gamma} W_\alpha) = \varnothing$. Grâce au théorème de récurrence transfinie, il existe une famille $\{W_\alpha : \alpha < \beta\}$ de parties disjointes non vides de W telle que $\bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha$ est une base de X. Ainsi

$$\operatorname{card} B \leq \sum\nolimits_{\alpha<\beta} \operatorname{card} W_\alpha \leq \operatorname{card} W.$$

De même, $\operatorname{card} W \leq \operatorname{card} B$, ce qui implique l'équipotence de B et W, grâce au théorème de Cantor-Bernstein. ∎